

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA 5 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E EQUAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR À PRIMEIRA

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Quais são os valores próprios de A ?
- (b) Quais são os vectores próprios de A ?
- (c) Determine uma matriz de mudança de base, S , que diagonaliza A , e determine a sua inversa, S^{-1} .
- (d) Calcule e^{At} .
- (e) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(f) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

(g) Escreva duas funções $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior.

Resolução:

(a) Os valores próprios são os zeros do polinómio característico:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff (3 - \lambda)^2 - 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 5. \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são 1 e 5.

(b) Os vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 satisfazem

$$(A - I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = -b.$$

Logo, os vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 são os vectores da forma

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio 5 satisfazem

$$(A - 5I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b.$$

Logo, os vectores próprios de A associados ao valor próprio 5 são os vectores da forma

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a \in \mathbb{R}.$$

- (c) Mudando para uma base de vectores próprios de A , a transformação linear dada por A fica diagonal. Tome-se, por exemplo, a matriz de mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

cuja primeira e segunda colunas são vectores próprios de A associados aos valores próprios 1 e 5, respectivamente. A mudança inversa é

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Então tem-se

$$A = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} S^{-1}.$$

- (d) De acordo com a alínea anterior,

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^t + e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t} - e^t}{2} \\ \frac{e^{5t} - e^t}{2} & \frac{e^t + e^{5t}}{2} \end{bmatrix}.$$

- (e) A solução deste problema de valor inicial é

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^t + e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t} - e^t}{2} \\ \frac{e^{5t} - e^t}{2} & \frac{e^t + e^{5t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3e^{5t} - e^t}{2} \\ \frac{3e^{5t} + e^t}{2} \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- (f) A solução geral desta equação diferencial é dada, por exemplo, pela expressão

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ c_2 e^{5t} - c_1 e^t \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comentário: A solução acima pode ser escrita

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{At} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente, poder-se-ia ter respondido que a solução geral é dada por

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

As colunas de e^{At} formam uma base das soluções da equação dada. Como S é uma matriz invertível, as colunas de $e^{At}S$ também formam uma base das soluções da equação. Optou-se pela expressão $e^{At}S$ porque esta dá uma expressão mais simples para a solução geral. \diamond

- (g) Compõe-se uma base para o espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior, por exemplo, com as colunas da matriz

$$S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & e^{5t} \end{bmatrix},$$

ou seja, com as funções $x_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}.$$

De facto, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções linearmente independentes, são soluções da equação da alínea anterior e qualquer outra solução $y(t)$ é da forma $y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ para algum $c_1 \in \mathbb{R}$ e algum $c_2 \in \mathbb{R}$. \square

(2) Para cada uma das matrizes A seguintes, determine e^{At} .

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolução:

(a) Esta matriz A só tem um valor próprio:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff (-\lambda)(-2 - \lambda) + 1 = 0 \\ &\iff \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \\ &\iff \lambda = -1. \end{aligned}$$

Os vectores próprios são dados por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -a = b.$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio e procura-se um vector próprio generalizado, w , a associado a v :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \iff c + d = 1.$$

Escolhe-se a solução $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & (1+t)e^{-t} \\ -e^{-t} & -te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comentário: Quando se detecta que esta matriz 2×2 tem apenas o valor próprio -1 , pode-se concluir que a sua forma canónica de Jordan tem apenas um bloco. Com

efeito, se a forma canónica de Jordan J tivesse dois blocos, seria a matriz diagonal $J = -I$, pelo que a própria matriz A teria que ser

$$A = SJS^{-1} = S(-I)S^{-1} = -SS^{-1} = -I,$$

o que é falso. ◇

(b) Nota-se que a matriz transposta A^t é um bloco de Jordan. Como

$$e^{A^t t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^t t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^k t^k)^t}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right)^t = (e^{At})^t,$$

calcula-se

$$e^{A^t t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

e conclui-se que

$$e^{At} = (e^{A^t t})^t = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

(c) Os valores próprios da matriz são as soluções da equação

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(-1-\lambda)\lambda = 0$$

$$\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 0.$$

Os vectores próprios associados a 1 são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = c = 0.$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio de 1.

Os vectores próprios associados a -1 são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}.$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio de -1 .

Os vectores próprios associados a 0 são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}.$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio de 0.

Assim, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\
 &= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} - e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 1 - e^{-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Comentário: Ao encontrar 3 valores próprios diferentes para esta matriz 3×3 , pode-se concluir logo que ela é diagonalizável, ou seja, que existe uma base formada por vectores próprios de A , pois valores próprios diferentes admitem vectores próprios linearmente independentes. \diamond

(d) Os valores próprios da matriz são as soluções da equação

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 &\iff (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + (3-\lambda) = 0 \\
 &\iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \\
 &\iff \lambda = 3,
 \end{aligned}$$

portanto A tem apenas o valor próprio 3.

Os vectores próprios são os vectores que verificam

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A-3I} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -a + b + c = 0.$$

Como há exactamente uma condição linear a que os vectores próprios têm obedecer, o espaço próprio tem dimensão $3 - 1 = 2$. Toma-se os vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para formar uma base do espaço próprio, tendo tido o cuidado de escolher o vector v_2 pertencente ao espaço das colunas da matriz $A - 3I$. Calcula-se agora um vector próprio generalizado w associado a v_2 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A-3I} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Toma-se, por exemplo, $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Consequentemente, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{3t} & te^{3t} \\ e^{3t} & 0 & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-t)e^{3t} & te^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ -te^{3t} & te^{3t} & (1+t)e^{3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

(3) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule e^{At} .

(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

(a) Os valores próprios da matriz são as soluções de

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (-1 - \lambda)^2 + 1 = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \pm i. \end{aligned}$$

Os vectores próprios associados a $-1 + i$ são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff ia = b.$$

Uma base do espaço próprio de $-1 + i$ é constituída pelo vector $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Os vectores próprios associados a $-1 - i$ são os vectores conjugados dos vectores próprios associados a $-1 + i$. (De facto, se λ e $\bar{\lambda}$ são valores próprios complexos conjugados de uma matriz real A , então $(A - \lambda I)v = 0 \iff (A - \bar{\lambda} I)\bar{v} = 0$.) Uma

base do espaço próprio de $-1 - i$ é constituída pelo vector $v_2 = \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

Logo, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comentário: Apesar do método de resolução envolver complexos, a resposta tinha que ser real, pois a matriz dada é real e a exponencial de uma matriz real é real. \diamond

(b) Em termos de

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix},$$

este problema de valor inicial escreve-se

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

A solução é dada, por exemplo, pela fórmula de variação das constantes:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s) ds \\ &= 0 + \int_0^t e^{-(t-s)} \begin{bmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(t-s) \\ -\sin(t-s) \end{bmatrix} ds \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \int_0^t \cos(t-s) ds \\ -\int_0^t \sin(t-s) ds \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclui-se que a solução é

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \sin t \\ e^{-t}(\cos t - 1) \end{bmatrix}.$$

□

(4) Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + 2y_2 + t \\ \frac{dy_2}{dt} = 2y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

Resolução: Este sistema fica mais simples se for traduzido nas incógnitas $x_1 = y_1 - y_2$ e $x_2 = y_1 + y_2$. Como

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = t \\ \dot{y}_1 + \dot{y}_2 = 4(y_1 + y_2) + t \end{cases},$$

as novas funções satisfazem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t \\ \dot{x}_2 = 4x_2 + t \end{cases}.$$

A solução geral da primeira equação é

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + c_1$$

onde c_1 é uma constante real arbitrária. A segunda equação admite o factor de integração e^{-4t} e resolve-se como se segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = 4x_2 + t &\iff e^{-4t}\dot{x}_2 - 4e^{-4t}x_2 = te^{-4t} \\ &\iff \frac{d}{dt}(e^{-4t}x_2) = te^{-4t} \\ &\iff e^{-4t}x_2 = \int te^{-4t} dt + c_2 \\ &\iff x_2(t) = e^{4t} \left(-\frac{t}{4}e^{-4t} - \frac{1}{16}e^{-4t} + c_2 \right) \\ &\iff x_2(t) = -\frac{t}{4} - \frac{1}{16} + c_2e^{4t} \end{aligned}$$

onde c_2 é uma constante real arbitrária. Como $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e $y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$, conclui-se que a solução geral pedida é

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{t^2}{4} + k_1 - \frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} \\ y_2(t) = -\frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} - \frac{t^2}{4} - k_1 \end{cases}.$$

onde $k_1 = \frac{c_1}{2}$ e $k_2 = \frac{c_2}{2}$ são constantes reais arbitrárias. □

Comentário: Em alternativa, poder-se-ia ter aplicado a fórmula de variação das constantes ao sistema original. ◇

(5) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais escalares:

(a) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 0;$

(b) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1;$

(c) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t};$

(d) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1 + e^{-2t}.$

Resolução:

(a) Esta equação pode ser escrita

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0$$

onde $D = \frac{d}{dt}$ é o operador de derivação em ordem a t . Como $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ tem apenas a raiz -2 com multiplicidade 2, conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Esta equação pode ser escrita

$$(D^2 + 4D + 4)y = 1. \quad (*)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Para encontrar uma solução particular, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de 1 é D . A equação homogénea auxiliar $D(D^2 + 4D + 4)y = 0$ tem solução geral $a_1 + a_2 e^{-2t} + a_3 t e^{-2t}$. Como a família $a_2 e^{-2t} + a_3 t e^{-2t}$ é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada a (*), estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de (*). Vai-se então determinar a constante a_1 , substituindo-a na equação (*) e impondo que seja uma solução particular:

$$(D^2 + 4D + 4)a_1 = 1 \iff 4a_1 = 1 \iff a_1 = \frac{1}{4}.$$

Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{4}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Esta equação pode ser escrita

$$(D^2 + 4D + 4)y = e^{-2t}. \quad (**)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Para encontrar uma solução particular, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de e^{-2t} é $D+2$. A equação homogénea auxiliar $(D+2)(D^2 + 4D + 4)y = 0$, que é equivalente a $(D+2)^3 y = 0$, tem solução geral $a_1 e^{-2t} + a_2 t e^{-2t} + a_3 t^2 e^{-2t}$. Como a família $a_1 e^{-2t} + a_2 t e^{-2t}$ é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada a (**), estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de (**). Vai-se então determinar a constante a_3 , substituindo $a_3 t^2 e^{-2t}$ na equação (**) e impondo que seja uma solução particular:

$$\begin{aligned} & (D^2 + 4D + 4)(a_3 t^2 e^{-2t}) = e^{-2t} \\ \iff & (4a_3 t^2 e^{-2t} - 8a_3 t e^{-2t} + 2a_3 e^{-2t}) + 4(-2a_3 t^2 e^{-2t} + 2a_3 t e^{-2t}) + 4a_3 t^2 e^{-2t} = e^{-2t} \\ \iff & \begin{cases} 4a_3 - 8a_3 + 4a_3 = 0 \\ -8a_3 + 8a_3 = 0 \\ 2a_3 = 1 \end{cases} \iff a_3 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

onde o sistema de equações para a_3 foi obtido igualando os coeficientes de $t^2 e^{-2t}$, $t e^{-2t}$ e e^{-2t} nos membros esquerdo e direito. Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) Esta equação pode ser escrita

$$(D^2 + 4D + 4)y = 1 + e^{-2t}.$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Encontra-se uma solução particular somando as soluções particulares determinadas nas alíneas (b) e (c), as quais correspondem a cada uma das parcelas do membro direito da equação. Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t^2 e^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Comentário: Em alternativa, na alínea (d) poder-se-ia ter aplicado o método dos coeficientes indeterminados para calcular uma solução particular, notando que o aniquilador da soma $1 + e^{-2t}$ é a composição dos aniquiladores de 1 e de e^{-2t} , ou seja, é $D(D+2)$. ◇

- (6) Determine a solução que verifica as condições iniciais $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ e $y^{(2)}(0) = 1$ para as seguintes equações diferenciais escalares:

(a) $y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5\dot{y} = e^t + t$;

(b) $y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5\dot{y} = e^{2t} \cos t$.

Resolução:

(a) A equação diferencial pode ser escrita

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = e^t + t. \quad (*)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = 0. \quad (*)_H$$

Como $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$ tem as raízes simples 0, $2+i$ e $2-i$, a solução geral complexa da equação homogénea associada $(*)_H$ é

$$a_1 + a_2 e^{(2+i)t} + a_3 e^{(2-i)t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}.$$

enquanto que a solução geral real de $(*)_H$ é

$$y_H(t) = c_1 + c_2 e^{2t} \cos t + c_3 e^{2t} \sin t, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Para obter uma solução particular de $(*)$, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de $e^t + t$ é $D^2(D-1)$, obtido compondo aniquiladores das parcelas t e e^t . A equação homogénea auxiliar $D^2(D-1)(D^3 - 4D^2 + 5D)y = 0$, que é equivalente a $D^3(D-1)(D-2-i)(D-2+i)y = 0$, tem solução geral real $b_1 + b_2 t + b_3 t^2 + b_4 e^t + b_5 e^{2t} \cos t + b_6 e^{2t} \sin t$. Como a família $b_1 + b_5 e^{2t} \cos t + b_6 e^{2t} \sin t$ é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada $(*)_H$, estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de $(*)$. Vai-se então determinar as constantes b_2, b_3 e b_4 , substituindo $b_2 t + b_3 t^2 + b_4 e^t$ na equação $(*)$ e impondo que seja uma solução particular:

$$\begin{aligned} & (D^3 - 4D^2 + 5D)(b_2 t + b_3 t^2 + b_4 e^t) = e^t + t \\ \iff & b_4 e^t - 4(2b_3 + b_4 e^t) + 5(b_2 + 2b_3 t + b_4 e^t) = e^t + t \\ \iff & \begin{cases} b_4 - 4b_4 + 5b_4 = 1 \\ 10b_3 = 1 \\ -8b_3 + 5b_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_4 = \frac{1}{2} \\ b_3 = \frac{1}{10} \\ b_2 = \frac{4}{25} \end{cases} \end{aligned}$$

onde o sistema de equações para b_2 , b_3 e b_4 foi obtido igualando os coeficientes de e^t , t e 1 nos membros esquerdo e direito. Logo, uma solução particular de (\star) é

$$y_P(t) = \frac{4}{25}t + \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Conclui-se que a solução geral de (\star) é

$$y(t) = \underbrace{c_1 + c_2 e^{2t} \cos t + c_3 e^{2t} \sin t}_{y_H(t)} + \underbrace{\frac{4}{25}t + \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}e^t}_{y_P(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Para achar a solução particular que satisfaz as condições iniciais dadas, calcula-se a primeira e a segunda derivadas da solução geral:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= c_2 e^{2t} (2 \cos t - \sin t) + c_3 e^{2t} (2 \sin t + \cos t) + \frac{4}{25} + \frac{1}{5}t + \frac{1}{2}e^t \\ y^{(2)}(t) &= c_2 e^{2t} (3 \cos t - 4 \sin t) + c_3 e^{2t} (3 \sin t + 4 \cos t) + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}e^t \end{aligned}$$

e impõe-se as condições:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ \dot{y}(0) = 2c_2 + c_3 + \frac{4}{25} + \frac{1}{2} = 0 \\ y^{(2)}(0) = 3c_2 + 4c_3 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{22}{250} \\ c_2 = -\frac{147}{250} \\ c_3 = \frac{129}{250} \end{cases}.$$

Portanto a resposta é

$$y(t) = \frac{22}{250} - \frac{147}{250}e^{2t} \cos t + \frac{129}{250}e^{2t} \sin t + \frac{4}{25}t + \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(b) A equação diferencial pode ser escrita

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = e^{2t} \cos t. \quad (\star\star)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogênea associada

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = 0,$$

cujas solução geral real foi obtida na alínea anterior:

$$y_H(t) = c_1 + c_2 e^{2t} \cos t + c_3 e^{2t} \sin t, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar uma solução particular de $(\star\star)$, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de $e^{2t} \cos t$ é $(D - 2)^2 + 1$. A equação homogênea auxiliar $[(D - 2)^2 + 1](D^3 - 4D^2 + 5D)y = 0$, que é equivalente a $D(D - 2 - i)^2(D - 2 + i)^2 y = 0$, tem solução geral real

$$b_1 + b_2 e^{2t} \cos t + b_3 e^{2t} \sin t + b_4 t e^{2t} \cos t + b_5 t e^{2t} \sin t.$$

Como a família $b_1 + b_2 e^{2t} \cos t + b_3 e^{2t} \sin t$ é constituída exclusivamente por soluções da equação homogênea associada, estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de $(\star\star)$. Vai-se então determinar as constantes b_4 e b_5 , substituindo $b_4 t e^{2t} \cos t + b_5 t e^{2t} \sin t$ na equação $(\star\star)$ e impondo que seja uma solução particular:

$$\begin{aligned} (D^3 - 4D^2 + 5D)(b_4 t e^{2t} \cos t + b_5 t e^{2t} \sin t) &= e^{2t} \cos t \\ \iff (-2b_4 + 4b_5) \cdot e^{2t} \cos t + (-4b_4 - 2b_5) \cdot e^{2t} \sin t + 0 \cdot t e^{2t} \cos t + 0 \cdot t e^{2t} \sin t &= e^{2t} \cos t \\ \iff \begin{cases} -2b_4 + 4b_5 = 1 \\ -4b_4 - 2b_5 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} b_4 = -\frac{1}{10} \\ b_5 = \frac{1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

onde o sistema de equações para b_4 e b_5 foi obtido igualando os coeficientes de $e^{2t} \cos t$ e $e^{2t} \sin t$ nos membros esquerdo e direito. Logo, uma solução particular de $(\star\star)$ é

$$y_P(t) = -\frac{1}{10}te^{2t} \cos t + \frac{1}{5}te^{2t} \sin t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Conclui-se que a solução geral de $(\star\star)$ é

$$y(t) = \underbrace{c_1 + c_2e^{2t} \cos t + c_3e^{2t} \sin t}_{y_H(t)} - \underbrace{\frac{1}{10}te^{2t} \cos t + \frac{1}{5}te^{2t} \sin t}_{y_P(t)},$$

para todo o t em \mathbb{R} onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Para achar a solução particular que satisfaz as condições iniciais dadas, calcula-se a primeira e a segunda derivadas da solução geral:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= c_2e^{2t}(2 \cos t - \sin t) + c_3e^{2t}(2 \sin t + \cos t) \\ &\quad - \frac{1}{10}e^{2t} \cos t - \frac{1}{10}te^{2t}(2 \cos t - \sin t) \\ &\quad + \frac{1}{5}e^{2t} \sin t + \frac{1}{5}te^{2t}(2 \sin t + \cos t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= c_2e^{2t}(3 \cos t - 4 \sin t) + c_3e^{2t}(3 \sin t + 4 \cos t) \\ &\quad - \frac{1}{10}e^{2t}(4 \cos t - 2 \sin t) - \frac{1}{10}te^{2t}(3 \cos t - 4 \sin t) \\ &\quad + \frac{1}{5}e^{2t}(4 \sin t + 2 \cos t) + \frac{1}{5}te^{2t}(3 \sin t + 4 \cos t) \end{aligned}$$

e impõe-se as condições:

$$\begin{cases} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ \dot{y}(0) &= 2c_2 + c_3 - \frac{1}{10} = 0 \\ y^{(2)}(0) &= 3c_2 + 4c_3 - \frac{4}{10} + \frac{2}{5} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{3}{25} \\ c_2 = -\frac{3}{25} \\ c_3 = \frac{17}{50} \end{cases}.$$

Portanto a resposta é

$$y(t) = \frac{3}{25} - \frac{3}{25}e^{2t} \cos t + \frac{17}{50}e^{2t} \sin t - \frac{1}{10}te^{2t} \cos t + \frac{1}{5}te^{2t} \sin t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□